



Preparación, secuencia y alcance

ES.F.33.5 · Unidad 11.2: Trigonometría en el triángulo rectángulo (semanas 8–13 del catálogo).

Triángulos especiales y círculo unitario

- Usa triángulos especiales para determinar de forma geométrica los valores de seno, coseno y tangente de $0, \pi, \pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/6$ y sus múltiplos.
- Usa el círculo unitario para expresar los valores de seno, coseno y tangente de $x, \pi + x$, y $2\pi - x$ en términos de sus valores de x , donde x es un número real cualquiera.

Objetivo observable: deducir valores exactos con triángulos especiales; localizar posiciones en un círculo; justificar signos, simetrías y una decisión bajo restricciones.

Preparación: cuatro páginas por estudiante, lápiz y regla; papel adicional para las construcciones. Compás o calco opcionales. El círculo impreso es un modelo; no se requiere montaje, sensores ni un robot real. Prerrequisitos: Pitágoras, ángulos, coordenadas y significado de seno/coseno/tangente.

Sesión 1 · 40 minutos

1. **5 min:** plantear las estaciones, el origen y el sentido del giro.
2. **15 min:** construir los dos triángulos. Deducir $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$; dividir los lados entre la hipotenusa para normalizar a radio 1.
3. **15 min:** tabla y reflejos por parejas. Preguntar: «¿Qué coordenada cambia de signo? ¿Qué conserva la simetría?».
4. **5 min:** justificar una posición cardinal y una de otro cuadrante.

Sesión 2 · 40 minutos

1. **12 min:** coordenadas de las candidatas y decisión.
2. **12 min:** ubicar P, Q y R; distinguir reflexión y media vuelta.
3. **10 min:** generalizar las seis identidades y su dominio.
4. **6 min:** salida individual y comparación de argumentos.

Apoyo: usar un triángulo de calco para reflejarlo; describir los cambios antes de escribir identidades. Las longitudes son positivas; los signos corresponden a coordenadas orientadas. Las medidas aproximadas del papel no prueban un valor exacto.

Evaluación sugerida (0-2 cada una): deducción geométrica; tabla y signos; decisión con ambas restricciones; identidades con dominio. 2: justificación coherente; 1: parcial; 0: evidencia aún ausente. Total 8. Lenguaje opcional: unit circle / círculo unitario; reflection / reflexión; exact value / valor exacto.

Procedencia: diseño y diagramas originales de PAM; indicador del catálogo cotejado DEPR. Contexto ficticio. OCR, triángulos especiales y OpenStax, círculo unitario son referencias externas de consulta, no fuentes de un contexto copiado ni actividades certificadas por DEPR.

Solución y comprobaciones docentes

θ	Radianes	$\cos \theta$	$\sen \theta$	$\tan \theta$
0°	0	1	0	0
30°	$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	0	1	No definida
120°	$2\pi/3$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
150°	$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/3$
180°	π	-1	0	0
210°	$7\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}/3$
225°	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240°	$4\pi/3$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
270°	$3\pi/2$	0	-1	No definida
300°	$5\pi/3$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
330°	$11\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/3$

Deducción: cuadrado de lado 1 $\rightarrow$ hipotenusa $\sqrt{2} \rightarrow$ coordenadas $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Equilátero de lado 2 $\rightarrow$ altura $\sqrt{3}$ y semibase 1; a 30° : $(\sqrt{3}/2, 1/2)$; a 60° : $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

Candidatas: $45^\circ \rightarrow (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$: Norte < 3 porque $(2\sqrt{2})^2 = 8 < 9$. $60^\circ \rightarrow (2, 2\sqrt{3})$: Norte > 3 porque $12 > 9$ y Este = 2. Se elige **60°** . Las cantidades comparadas son positivas, por eso es válido comparar cuadrados.

P: 30° , $(2\sqrt{3}, 2)$; $\sen = 1/2$, $\cos = \sqrt{3}/2$, $\tan = \sqrt{3}/3$. **Q:** $210^\circ = 7\pi/6$, $(-2\sqrt{3}, -2)$; $\sen = -1/2$, $\cos = -\sqrt{3}/2$, $\tan = \sqrt{3}/3$.

R: $330^\circ = 11\pi/6$, $(2\sqrt{3}, -2)$; $\sen = -1/2$, $\cos = \sqrt{3}/2$, $\tan = -\sqrt{3}/3$.

Generalización: $\sen(\pi + x) = -\sen x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$; $\tan(\pi + x) = \tan x$. $\sen(2\pi - x) = -\sen x$; $\cos(2\pi - x) = \cos x$; $\tan(2\pi - x) = -\tan x$. Seno y coseno: todo x real. Tangente: solo si $\cos x \neq 0$ ($x \neq \pi/2 + k\pi$, k entero).

Salida: posición (0, 4) m; $\tan 90^\circ = 1/0$ no está definida. Cero en el denominador no produce cero. No aceptar «infinito» como valor de la tangente en ese ángulo.